

# INDICE

## CALCULO DIFERENCIAL

### CAPITULO I

#### Resumen de fórmulas

Fórmulas de Algebra y de Geometría elementales, 3. Fórmulas de Trigonometría plana, 4. Fórmulas de Geometría analítica plana, 6. Fórmulas de Geometría analítica del espacio, 8. Alfabeto griego, 10.

### ○ CAPITULO II

#### Variables, funciones y límites

Variables y constantes, 11. Intervalo de una variable, 11. Variación continua, 12. Funciones, 12. Variables independientes y dependientes, 12. Notación de funciones, 13. La división por cero, excluida, 13. Gráfica de una función: continuidad, 15. Límite de una variable, 16. Límite de una función, 16. Teoremas sobre límites, 17. Funciones continuas y discontinuas, 17. Infinito, 19. Infinitésimos, 22. Teoremas relativos a infinitésimos y límites, 23.

### ○ CAPITULO III

#### Derivación

Introducción, 25. Incrementos, 25. Comparación de incrementos, 26. Derivada de una función de una variable, 27. Símbolos para representar las derivadas, 28. Funciones derivables, 30. Regla general para la derivación, 30. Interpretación geométrica de la derivada, 32.

### CAPITULO IV

#### Reglas para derivar funciones algebraicas

Importancia de la regla general, 36. Derivada de una constante, 37. Derivada de una variable con respecto a sí misma, 38. Derivada de una suma, 38. Derivada del producto de una constante por una función, 39. Derivada del

producto de dos funciones, 39. Derivada del producto de  $n$  funciones, siendo  $n$  un número fijo, 40. Derivada de la potencia de una función, siendo el exponente constante, 41. Derivada de un cociente, 41. Derivada de una función de función, 46. Relación entre las derivadas de las funciones inversas, 47. Funciones implícitas, 49. Derivación de funciones implícitas, 49.

## CAPITULO V

### Aplicaciones de la derivada

Dirección de una curva, 52. Ecuaciones de la tangente y la normal: longitudes de la subtangente y la subnormal, 54. Valores máximo y mínimo de una función: introducción, 58. Funciones crecientes y decrecientes, 62. Máximos y mínimos de una función: definiciones, 64. Primer método para calcular los máximos y mínimos de una función. Regla guía en las aplicaciones, 66. Máximos o mínimos cuando  $f'(x)$  se vuelve infinita y  $f(x)$  es continua, 68. Problemas sobre máximos y mínimos, 71. La derivada como rapidez de variación, 78. Velocidad en un movimiento rectilíneo, 80. Relación entre la rapidez de variación de variables relacionadas, 82.

## CAPITULO VI

### Derivadas sucesivas de una función. Aplicaciones

Definición de las derivadas sucesivas, 89. Obtención de las derivadas sucesivas en funciones implícitas, 90. Sentido de la concavidad de una curva, 92. Segundo método para determinar máximos y mínimos, 92. Puntos de inflexión, 96. Método para construcción de curvas dadas por su ecuación, 98. Aceleración en un movimiento rectilíneo, 101.

## CAPITULO VII

### Derivación de funciones trascendentes. Aplicaciones

Fórmulas de derivación: lista segunda, 105. El número  $e$ . Logaritmos naturales, 106. Funciones exponenciales y logarítmicas, 108. Derivación de la función logarítmica, 109. Derivación de la función exponencial, 110. Derivación de la función exponencial general. Demostración de la regla de potencias, 111. Derivación logarítmica, 113. Función  $\operatorname{sen} x$ , 117. Límite de  $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$  cuando  $x \rightarrow 0$ , 118. Derivada de  $\operatorname{sen} v$ , 119. Otras funciones trigonométricas, 120. Derivada de  $\operatorname{cos} v$ , 121. Demostración de las fórmulas XV a XIX, 122. Funciones trigonométricas inversas, 126. Derivación de  $\operatorname{arc} \operatorname{sen} v$ , 128. Derivación de  $\operatorname{arc} \operatorname{cos} v$ , 128. Derivación de  $\operatorname{arc} \operatorname{tg} v$ , 129. Derivación de  $\operatorname{arc} \operatorname{ctg} v$ , 130. Derivaciones de  $\operatorname{arc} \operatorname{sec} v$  y  $\operatorname{arc} \operatorname{csc} v$ , 131. Derivación de  $\operatorname{arc} \operatorname{vers} v$ , 132.

## CAPITULO VIII

**Aplicaciones a las ecuaciones paramétricas y polares y al cálculo de las raíces de una ecuación**

Ecuaciones paramétricas de una curva. Pendiente, 138. Ecuaciones paramétricas. Segunda derivada, 143. Movimiento curvilíneo. Velocidad, 144. Movimiento curvilíneo. Aceleraciones componentes, 145. Coordenadas polares. Angulo que forman el radio vector y la tangente, 148. Longitudes de la subtangente y la subnormal en coordenadas polares, 152. Raíces reales de las ecuaciones. Métodos gráficos, 154. Segundo método para localizar las raíces reales, 156. Método de Newton, 158.

## CAPITULO IX

**Diferenciales**

Introducción, 164. Definiciones, 164. La diferencial como aproximación del incremento, 165. Errores pequeños, 166. Fórmulas para hallar las diferenciales de funciones, 169. Diferencial del arco en coordenadas cartesianas rectangulares, 171. Diferencial del arco en coordenadas polares, 173. La velocidad como rapidez de variación de la longitud del arco con respecto al tiempo, 175. Las diferenciales como infinitésimos, 176. Ordenes de infinitésimos. Diferenciales de orden superior, 177.

## CAPITULO X

**Curvatura. Radio de curvatura. Círculo de curvatura**

Curvatura, 179. Curvatura de la circunferencia, 180. Fórmulas para la curvatura (coordenadas rectangulares), 180. Fórmula especial para las ecuaciones paramétricas, 182. Fórmula para la curvatura (coordenadas polares), 182. Radio de curvatura, 183. Curvas de ferrocarril; curvas de transición, 183. Círculo de curvatura, 184. Centro de curvatura, 188. Evolutas, 190. Propiedades de la evoluta, 194. Las evolventes y su construcción mecánica, 196. Transformación de derivadas, 199.

## CAPITULO XI

**Teorema del valor medio y sus aplicaciones**

Teorema de Rolle, 203. Círculo osculador, 204. Punto límite de la intersección de dos normales infinitamente próximas, 206. Teorema del valor medio, 207. Formas indeterminadas, 209. Determinación del valor de una función cuando ésta toma una forma indeterminada, 210. Determinación del valor de la forma indeterminada  $\frac{0}{0}$ , 210. Determinación del valor de la forma indeterminada  $\frac{\infty}{\infty}$ , 214. Determinación del valor de la forma in-

determinada  $0 \cdot \infty$ , 214. Determinación del valor de la forma indeterminada  $\infty - \infty$ , 215. Determinación del valor de las formas indeterminadas  $0^\circ$ ,  $1^\infty$ ,  $\infty^\circ$ , 216. Generalización del teorema del valor medio, 218. Los máximos y mínimos, tratados analíticamente, 219.

## CALCULO INTEGRAL

### CAPITULO XII

#### Integración de formas elementales ordinarias

Integración, 227. Constante de integración. Integral indefinida, 229. Reglas para integrar las formas elementales ordinarias, 230. Demostración de las fórmulas (3), (4) y (5), 233. Demostración de las fórmulas (6) y (7), 240. Demostración de las fórmulas (8) a (17), 242. Demostración de las fórmulas (18) a (21), 246. Demostración de las fórmulas (22) y (23), 254. Integración de diferenciales trigonométricas, 257. Integración, por sustitución trigonométrica, de expresiones que contienen  $\sqrt{a^2 - u^2}$  o  $\sqrt{u^2 \pm a^2}$ , 266. Integración por partes, 269. Observaciones, 274.

### CAPITULO XIII

#### Constante de integración

Determinación de la constante de integración por medio de condiciones iniciales, 277. Significado geométrico, 277. Significado físico de la constante de integración, 281.

### ○ CAPITULO XIV

#### Integral definida

Diferencial del área bajo una curva, 287. La integral definida, 288. Cálculo de una integral definida, 289. Cambio de límites correspondientes a un cambio de la variable, 290. Cálculo de áreas, 292. Cálculo del área cuando las ecuaciones de la curva se dan en forma paramétrica, 293. Representación geométrica de una integral, 297. Integración aproximada. Fórmula de los trapecios, 297. Fórmula de Simpson (fórmula parabólica), 300. Intercambio de límites, 303. Descomposición del intervalo de integración en una integral definida, 303. La integral definida es una función de sus límites, 304. Integrales impropias. Límites infinitos, 304. Integrales impropias, 305.

### CAPITULO XV

#### La integración como suma

Introducción, 309. Teorema fundamental del Cálculo integral, 309. Demostración analítica del teorema fundamental, 312. Áreas de superficies limitadas por curvas planas; coordenadas rectangulares, 314. Áreas de curvas

planas; coordenadas polares, 319. Volúmenes de sólidos de revolución, 322. Longitud de un arco de curva, 330. Longitudes de arcos de curvas planas; coordenadas rectangulares, 331. Longitudes de arcos de curvas planas; coordenadas polares, 334. Areas de superficies de revolución, 337. Sólidos cuyas secciones transversales se conocen, 344.

## CAPITULO XVI

### Artificios de integración

Introducción, 352. Integración de fracciones racionales, 352. Integración por sustitución de una nueva variable; racionalización, 361. Diferenciales binomias, 365. Condiciones de racionalización de la diferencial binomia, 368. Transformación de las diferenciales trigonométricas, 369. Sustituciones diversas, 371.

## CAPITULO XVII

### Fórmulas de reducción. Uso de la tabla de integrales

Introducción, 374. Fórmulas de reducción para las diferenciales binomias, 374. Fórmulas de reducción para las diferenciales trigonométricas, 380. Empleo de una tabla de integrales, 384.

## CAPITULO XVIII

### Centros de gravedad. Presión de líquidos. Trabajo. Valor medio

Momento de superficie; centro de gravedad, 390. Centro de gravedad de un sólido de revolución, 394. Presión de líquidos, 396. Trabajo, 400. Valor medio de una función, 406.

## CAPITULO XIX

### Series

Definiciones, 412. La serie geométrica, 413. Series convergentes y divergentes, 415. Teoremas generales, 416. Criterios de comparación, 417. Criterio de D'Alembert, 422. Series alternadas, 423. Convergencia absoluta, 424. Resumen, 425. Series de potencias, 428. La serie binómica, 431. Otro tipo de serie de potencias, 433.

## CAPITULO XX

### Desarrollo de funciones en serie de potencias

Serie de Maclaurin, 435. Operaciones con series infinitas, 441. Derivación e integración de series de potencias, 445. Deducción de fórmulas

aproximadas de la serie de Maclaurin, 448. Serie de Taylor, 450. Otra forma de la serie de Taylor, 452. Fórmulas aproximadas deducidas de la serie de Taylor, 454.

## CAPITULO XXI

### Ecuaciones diferenciales ordinarias

Ecuaciones diferenciales: orden y grado, 458. Soluciones de una ecuación diferencial. Constantes de integración, 459. Verificación de las soluciones de ecuaciones diferenciales, 460. Ecuaciones diferenciales de primer orden y de primer grado, 462. Dos tipos especiales de ecuaciones diferenciales de orden superior, 473. Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes constantes, 476. Aplicaciones. Ley del interés compuesto, 486. Aplicaciones a problemas de Mecánica, 490. Ecuaciones diferenciales lineales de enésimo orden con coeficientes constantes, 496.

## CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

### CAPITULO XXII

#### Funciones hiperbólicas

Seno y coseno hiperbólicos, 507. Otras funciones hiperbólicas, 508. Tabla de valores de senos, cosenos y tangentes hiperbólicos. Gráficas, 510. Funciones hiperbólicas de  $v$  y  $w$ , 511. Derivadas, 514. Relaciones con la hipérbola equilátera, 514. Funciones hiperbólicas inversas, 518. Derivadas (continuación), 521. Línea telegráfica, 523. Integrales, 526. Integrales (continuación), 529. El gudermaniano, 532. Carta de Mercator, 535. Relaciones entre las funciones trigonométricas y las hiperbólicas, 538.

### CAPITULO XXIII

#### Derivadas parciales

Funciones de dos o más variables. Continuidad, 543. Derivadas parciales, 544. Interpretación geométrica de las derivadas parciales, 546. Diferencial total, 549. Valor aproximado del incremento total. Errores pequeños, 552. Derivadas totales. Razones de variación, 556. Cambio de variables, 558. Derivación de funciones implícitas, 560. Derivadas de orden superior, 565.

### CAPITULO XXIV

#### Aplicaciones de las derivadas parciales

Envolvente de una familia de curvas, 570. La evoluta de una curva dada considerada como la envolvente de sus normales, 575. Ecuaciones de la tangente y del plano normal a una curva alabeada, 577. Longitud de un arco

de curva alabeada, 580. Ecuaciones de la normal y del plano tangente a una superficie, 582. Interpretación geométrica de la diferencial total, 584. Otra forma de las ecuaciones de la tangente y el plano normal a una curva alabeada, 587. Teorema del valor medio, 590. Máximos y mínimos de funciones de varias variables, 592. Teorema de Taylor para funciones de dos o más variables, 598.

## CAPITULO XXV

## Integrales múltiples

Integración parcial y sucesiva, 602. Integral doble definida. Interpretación geométrica, 603. Valor de una integral doble definida extendida a una región  $S$ , 609. Área de una superficie plana como integral doble definida, 610. Volumen bajo una superficie, 614. Instrucciones para establecer, en la práctica, una integral doble, 617. Momento de una superficie y centros de gravedad, 617. Teorema de Pappus, 619. Centro de presión de líquidos, 622. Momento de inercia de una superficie, 623. Momento polar de inercia, 627. Coordenadas polares. Área plana, 629. Fórmulas que emplean coordenadas polares, 632. Método general para hallar las áreas de las superficies curvas, 635. Cálculo de volúmenes por integración triple, 641. Cálculo de volúmenes, empleando coordenadas cilíndricas, 644.

## CAPITULO XXVI

## Curvas importantes

Parábola cúbica, parábola semicúbica, la bruja de Agnesi, cisoides de Diocles, 653. Lemniscata de Bernoulli, conchoide de Nicomedes, cicloide ordinaria, cicloide con vértice en el origen, catenaria, parábola, 654. Astroide, evoluta de la elipse, cardioide, hoja de Descartes, senoide y cosenoide, 655. Caracol de Pascal, estrofoide, espiral de Arquímedes, espiral logarítmica, espiral hiperbólica, lituus, 656. Espiral parabólica, curva logarítmica, curva exponencial, curva de probabilidad, secantoide, tangentoide, 657. Rosa de tres hojas, rosa de cuatro hojas, rosa de dos hojas, rosa de ocho hojas, 658. Parábola, hipérbola equilátera, evolvente de círculo, tractriz, 659.

## CAPITULO XXVII

## Tabla de integrales

Algunas formas elementales, 660. Formas racionales que contienen  $a + bu$ , 660. Formas racionales que contienen  $a^2 + b^2u^2$ , 661. Formas que contienen  $\sqrt{a + bu}$ , 662. Formas que contienen  $\sqrt{u^2 \pm a^2}$ , 663. Formas que contienen  $\sqrt{a^2 - u^2}$ , 665. Formas que contienen  $\sqrt{2au \pm u^2}$ , 667. Fórmulas de reducción para las integrales binomias, 668. Formas que

contienen  $a + bu \pm cu^2$  ( $c > 0$ ), 669. Otras formas algebraicas, 670. Formas exponenciales y logarítmicas, 671. Formas trigonométricas, 672. Formas de reducción para integrales trigonométricas, 674. Funciones trigonométricas inversas, 675. Funciones hiperbólicas, 676.

INDICE ALFABETICO..... 679