

Contenidos

I Sistemas de ecuaciones, matrices y determinantes	9
1 Sistemas de ecuaciones lineales	11
1.1 Ecuaciones lineales	11
1.2 Sistemas de ecuaciones lineales	11
1.3 Discusión de un sistema	12
1.4 Método de Gauss-Jordan	12
2 Matrices. Transformaciones elementales	17
2.1 Matrices	17
2.2 Matrices triangulares y diagonales	18
2.3 Matrices escalonadas reducidas	18
2.4 Forma normal de Hermite	20
2.5 Rango de una matriz	22
2.6 Matrices y sistemas de ecuaciones	23
3 Operaciones con matrices	25
3.1 Suma de matrices	25
3.2 Producto de un escalar por una matriz	26
3.3 Producto de matrices	26
3.4 División de una matriz en bloques	29
3.5 Producto por bloques	29
3.6 Matriz traspuesta	32
3.7 Propiedades del rango y de la traza	33
4 Matrices regulares	35
4.1 Matrices elementales	35
4.2 Matriz inversa. Matrices regulares	36
4.3 Cálculo de la matriz inversa	39
4.4 Matrices equivalentes	41
5 Determinantes	45
5.1 Determinante de una matriz cuadrada	45
5.2 Propiedades de los determinantes	46
5.3 Matriz inversa y determinantes	51
5.4 Rango y determinantes	52
5.5 Sistemas de ecuaciones y determinantes. Regla de Cramer	53
Ejercicios resueltos	55
Ejercicios propuestos	63
II Espacios vectoriales	69
1 Espacios vectoriales. Bases	71
1.1 Definición y ejemplos	71
1.2 Dependencia e independencia lineal	73
1.3 Sistemas de generadores de un espacio vectorial	77
1.4 Bases de un espacio vectorial	78
1.5 Coordenadas de un vector respecto de una base	81
1.6 Coordenadas y dependencia lineal	83
1.7 Cambio de base	84

2 Subespacios vectoriales	87
2.1 Definición y ejemplos	87
2.2 Subespacio generado por un conjunto de vectores	88
2.3 Espacio de filas y espacio de columnas de una matriz	90
2.4 Ecuaciones cartesianas y paramétricas de un subespacio	90
2.5 Ecuaciones cartesianas y dimensión de un subespacio	93
2.6 Intersección de subespacios	94
2.7 Suma de subespacios	95
2.8 Suma directa de subespacios	96
2.9 Fórmula de las dimensiones	98
2.10 Espacio vectorial cociente	99
3 Espacios vectoriales euclídeos	103
3.1 Productos escalares	103
3.2 Matriz de Gram. Expresión matricial del producto escalar	105
3.3 Matriz de Gram y cambio de base	106
3.4 Norma de un vector	107
3.5 Ángulo entre dos vectores. Vectores ortogonales	110
3.6 Bases ortogonales y ortonormales	111
3.7 Construcción de bases ortonormales. Método de Gram-Schmidt	112
3.8 Complemento ortogonal	115
3.9 Proyección ortogonal	117
3.10 Producto vectorial en \mathbb{R}^3	118
Ejercicios resueltos	123
Ejercicios propuestos	139

III Aplicaciones lineales

145

1 Aplicaciones lineales. Núcleo e imagen	147
1.1 Definición y ejemplos	147
1.2 Núcleo e imagen de una aplicación lineal	149
1.3 Aplicaciones lineales inyectivas y sobreyectivas. Isomorfismos	150
1.4 Operaciones con aplicaciones lineales	152
2 Aplicaciones lineales y matrices	155
2.1 Matriz asociada a una aplicación lineal	155
2.2 Matriz asociada y núcleo e imagen	157
2.3 Matriz asociada y cambio de base	159
2.4 Matriz asociada y operaciones con aplicaciones lineales	160
3 Espacio dual	163
3.1 Bases duales	163
3.2 Anulador de un subespacio	167
3.3 Aplicación lineal traspuesta	168
3.4 Una aplicación de la teoría del espacio dual: interpolación de Lagrange	169
4 Isometrías	173
4.1 Definición y ejemplos	173
4.2 Isometrías en \mathbb{R}^2	175
4.3 Isometrías en \mathbb{R}^3	178
Ejercicios resueltos	181
Ejercicios propuestos	195

IV Diagonalización y forma de Jordan	203
1 Diagonalización por semejanza	205
1.1 Semejanza de matrices. El problema de la diagonalización	205
1.2 Autovalores y autovectores	206
1.3 Polinomio característico	208
1.4 Multiplicidad algebraica y multiplicidad geométrica	209
1.5 Endomorfismos y matrices diagonalizables	211
1.6 Diagonalización por semejanza ortogonal de matrices simétricas	216
2 Forma canónica de Jordan	219
2.1 Introducción	219
2.2 Bloques de Jordan y matrices de Jordan	220
2.3 Subespacios propios generalizados. Subespacio máximo	221
2.4 La base de $M(\lambda)$	222
2.5 Cálculo de la base de $M(\lambda)$	224
2.6 Teorema de existencia de forma canónica de Jordan	227
3 Forma de Jordan real	233
3.1 Introducción	233
3.2 Parejas de autovalores y autovectores complejos	234
3.3 Forma de Jordan real	235
3.4 Matriz de paso a forma de Jordan real	237
Ejercicios resueltos	241
Ejercicios propuestos	263
V Formas bilineales y cuadráticas	267
1 Formas bilineales	269
1.1 Definición y propiedades básicas	269
1.2 Matriz asociada a una forma bilineal	270
1.3 Matriz asociada y cambio de base	272
1.4 Formas bilineales simétricas y antisimétricas	272
2 Formas cuadráticas	275
2.1 Definición y propiedades básicas	275
2.2 Forma polar de una forma cuadrática	276
2.3 Matriz asociada a una forma cuadrática	277
2.4 Conjugación respecto de una forma cuadrática	278
2.5 Clasificación de formas cuadráticas reales	278
2.6 Signatura de una forma cuadrática real	280
2.7 Diagonalización por congruencia	283
2.8 Criterio de Sylvester	286
Ejercicios resueltos	289
Ejercicios propuestos	293
VI Espacio afín. Cónicas y cuádricas	295
1 Espacio afín y afín métrico	297
1.1 Definición y ejemplos	297
1.2 Sistemas de referencia y coordenadas	298
1.3 Cambio de sistema de referencia	299
1.4 Variedades afines	300

1.5 Ecuaciones cartesianas y paramétricas de una variedad afín	301
1.6 Variedad afín generada por un conjunto de puntos	302
1.7 Intersección y suma de variedades afines	304
1.8 Posición relativa de dos variedades afines	305
1.9 Proyección ortogonal de un punto sobre una variedad	307
1.10 Distancia de un punto a una variedad afín	308
1.11 Distancia entre dos variedades afines	309
1.12 Problemas métricos en el plano	310
1.13 Problemas métricos en el espacio afín euclídeo tridimensional	312
2 Aplicaciones afines y movimientos	315
2.1 Definición y ejemplos	315
2.2 Expresión matricial de una aplicación afín	316
2.3 Movimientos rígidos	318
2.4 Puntos fijos y variedades invariantes	319
2.5 Clasificación de los movimientos rígidos en \mathbb{R}^2	322
2.6 Clasificación de los movimientos rígidos en \mathbb{R}^3	323
3 Cónicas y cuádricas	327
3.1 Elipse	327
3.2 Hipérbola	328
3.3 Parábola	329
3.4 Secciones cónicas	330
3.5 Ecuación general de una cónica	332
3.6 Ecuación reducida de una cónica	333
3.7 Cálculo de los elementos geométricos	338
3.8 Invariantes métricos de las cónicas	339
3.9 Invariantes y ecuación reducida	340
3.10 Ecuación general, clasificación y cálculo de la ecuación reducida de una cuádrica	341
3.11 Invariantes métricos y clasificación por invariantes de las cuádricas	346
Ejercicios resueltos	349
Ejercicios propuestos	363
VII Inversas generalizadas. Mínimos-cuadrados	371
1 Matrices inversas generalizadas	373
1.1 Matrices de rango pleno	373
1.2 Inversas laterales	374
1.3 Inversa generalizada de Moore-Penrose	377
2 Sistemas de ecuaciones. Mínimos cuadrados	381
2.1 Soluciones mínimo-cuadráticas de un sistema incompatible	381
2.2 Solución mínimo-cuadrática de norma mínima	382
2.3 Problemas de mínimos cuadrados	384
Ejercicios resueltos	389
Ejercicios propuestos	395
Índice	397