

# CONTENIDO

Formalidades  
Dedicatoria  
Reconocimientos  
Agradecimiento especial  
Presentación de la obra  
Amigo Estudiante  
Estimado Docente

## CAPÍTULO 1

### Matrices, Determinantes y Sistemas de ecuaciones lineales

#### **PRESENTACIÓN 1**

#### **Presentación del capítulo 2**

- 1.1. Introducción. 2
- 1.2. Definición. 3
- 1.3. Definiciones previas. 3
  - 1.3.A. Notación de un elemento. 3
  - 1.3.B. Notación de una matriz. 3
  - 1.3.C. Orden de una matriz. 4
  - 1.3.D. Identificación de los elementos. 4
  - 1.3.E. Tipos de elementos. 5
  - 1.3.F. Construcción de matrices. 5
  - 1.3.G. Igualdad de matrices. 7
  - 1.3.H. Transpuesta de una matriz. 8
- 1.4. Matrices especiales. 9
- 1.5. Operaciones con matrices. 12
  - 1.5.A. Introducción. 12
  - 1.5.B. Adición de matrices. 12
  - 1.5.C. Sustracción de matrices. 13
  - 1.5.D. Multiplicación de un escalar por una matriz. 14
  - 1.5.E. Multiplicación de una matriz fila por una matriz columna. 16
  - 1.5.F. Producto de matrices. 16
  - 1.5.G. Potenciación de matrices. 19
  - 1.5.H. Traza de una matriz. 21
- 1.6. Determinante de una matriz. 21
  - 1.6.A. Definición. 21
  - 1.6.B. Determinante de una matriz de orden 2. 21
  - 1.6.C. Determinante de una matriz de orden 3. 22
  - 1.6.D. Propiedades del determinante. 23

- 1.6.E. Menores y cofactores. 23
  - E.1. Introducción. 23
  - E.2. Menores. 23
  - E.3. Cofactores. 23
  - E.4. Desarrollo de un determinante por cofactores. 24
  - E.5. Matriz de cofactores de A. 25
  - E.6. Matriz Adjunta. 26
- 1.7. Definiciones básicas. 27
  - 1.7.A. Matriz identidad. 27
    - A.1. Transpuesta de la matriz identidad. 27
    - A.2. Relación con la propiedad de los números reales. 27
  - 1.7.B. Rango de una matriz. 28
  - 1.7.C. Operaciones elementales, OE. 29
    - C.1. Usos. 29
    - C.2. Tipos de OE. 30
  - 1.7.D. Matrices equivalentes. 30
  - 1.7.E. Matriz escalonada. 31
  - 1.7.F. Determinación del rango de una matriz por OE. 32
  - 1.7.G. Matriz singular. 33
  - 1.7.H. Matriz no singular. 33
- 1.8. Matriz inversa. 33
  - 1.8.A. Introducción. 33
  - 1.8.B. Definición. 33
  - 1.8.C. Determinación de la matriz inversa. 34
    - C.1. Por fórmula. 34
    - C.2. Por operaciones elementales. 35
  - 1.8.D. Propiedades de la matriz inversa. 37
- 1.9. Sistema de ecuaciones. 37
  - 1.9.A. Introducción. 37
  - 1.9.B. Definición. 38
  - 1.9.C. Representación de un sistema de ecuaciones. 38
  - 1.9.D. Conjunto solución de un sistema de ecuaciones. 38
  - 1.9.E. Sistemas de ecuaciones equivalentes, SEE. 39
  - 1.9.F. Operaciones con sistemas de ecuaciones. 39
- 1.10. Sistema de ecuaciones lineales, SEL. 40
  - 1.10.A. Introducción. 40
  - 1.10.B. Definición. 40
  - 1.10.C. Clasificación de los SEL. 41
  - 1.10.D. Métodos para obtener el conjunto solución de un SEL. 42
  - 1.10.E. SEL sobredeterminado. 45
  - 1.10.F. SEL subdeterminado. 46
- 1.11. Ecuación matricial. 47
  - 1.11.A. Introducción. 47
  - 1.11.B. Definición. 48
  - 1.11.C. Representación de un SEL, con coeficientes en notación matricial. 48
  - 1.11.D. Representación matricial de un SEL. 48
  - 1.11.E. Consideraciones. 48
  - 1.11.F. Representación de la matriz aumentada. 50
    - F.1. Propiedades de la matriz aumentada. 50

- 1.11.G. Método de eliminación de Gauss-Jordan. 53
  - G.1. Definiciones requeridas. 53
    - G.1.1. Columna unitaria. 53
    - G.1.2. Forma escalonada reducida. 53
  - G.2. Consideraciones. 54
  - G.3. Procedimiento de resolución de SEL usando la eliminación de Gauss-Jordan. 54
  - G.4. Esquema del procedimiento. 54
- 1.11.H. Rango de un SEL. 58
- 1.11.I. Reconocimiento directo del tipo de solución. 59
- 1.12. Resolución de un SEL a partir de la matriz inversa. 59
  - 1.12.A. Introducción. 59
  - 1.12.B. Definición. 60
  - 1.12.C. Métodos de resolución aplicando la inversa en un SEL. 60
    - C.1. Por el uso de fórmulas. 60
    - C.2. Por OE. 62
- 1.13. Regla de Cramer. 65
  - 1.13.A. Introducción. 65
  - 1.13.B. Definición. 65
  - 1.13.C. Condiciones. 65
  - 1.13.D. Algoritmo de Cramer para SEL. 65
    - D.1. De dos variables. 65
    - D.2. De tres variables. 66
  - 1.13.E. Identificación del tipo de solución, con el discriminante. 67
- 1.14. Modelado de SEL. 70
  - 1.14.A. Introducción. 70
  - 1.14.B. Criterios para modelar SEL. 70
- 1.15. Sistemas de ecuaciones no lineales, SenoL. 73
  - 1.15.A. Introducción. 73
  - 1.15.B. Definición. 73

EJERCICIOS SÓLO PARA TRIUNFADORES 75

APLICACIONES EN EL DÍA A DÍA 121

FULL EJERCICIOS 155

---

# CAPÍTULO 2

## Geometría analítica

### **PRESENTACIÓN** 175

#### **Presentación del capítulo** 176

- 2.1. Introducción. 176
- 2.2. Sistemas de coordenadas. 177
  - 2.2.A. Sistema coordenado lineal. 177
  - 2.3.B. Sistema coordenado en el plano. 178
    - B.1. Par ordenado. 179
    - B.2. Notación del par ordenado. 179
    - B.3. Igualdad de pares ordenados. 180
    - B.4. Adición de pares ordenados. 180
    - B.5. Localización de pares ordenados. 180
- 2.3. La recta. 181
  - 2.3.A. Introducción. 181
  - 2.3.B. Distancia entre dos puntos dados. 181
  - 2.3.C. Coordenadas del punto medio de un segmento. 184
  - 2.3.D. División de un segmento en una razón dada. 186
  - 2.3.E. Ángulo de inclinación de una recta. 188
  - 2.3.F. Pendiente de una recta. 190
    - F.1. Introducción. 190
    - F.2. Definición. 190
    - F.3. El reloj de la pendiente de una recta. 191
    - F.4. Tipos de pendiente. 191
  - 2.3.G. Ecuaciones de una recta. 193
    - G.1. Ángulo formado por dos rectas. 197
    - G.2. Distancia de un punto a una recta dada. 199
    - G.3. Área de un triángulo. 200
    - G.4. Bisectriz de un ángulo. 203
    - G.5. Familia de rectas. 205
    - G.6. Recta tangente y normal. 208

# CAPÍTULO 3

## Secciones cónicas

### **Presentación del capítulo** 211

- 3.1. Circunferencia. 212
    - 3.1.1. Definición. 212
    - 3.1.2. Ecuación de la circunferencia. 212
    - 3.1.3. Determinación de una circunferencia sujeta a tres condiciones. 216
    - 3.1.4. Familia de circunferencias. 217
  
  - 3.2. Parábola. 219
    - 3.2.1. Definición. 219
    - 3.2.2. Estructura y elementos de la parábola. 219
    - 3.2.3. Ecuación de la parábola. 220
    - 3.2.4. Ecuación general de la parábola. 225
    - 3.2.5. Ecuación de la recta tangente a una parábola. 226
  
  - 3.3. Elipse. 227
    - 3.3.1. Definición. 227
    - 3.3.2. Estructura de la elipse. 227
    - 3.3.3. Ficha de elementos de la elipse. 228
    - 3.3.4. Ecuación de la elipse. 229
    - 3.3.5. Ecuación general de la elipse. 235
    - 3.3.6. Recta tangente a una elipse. 236
  
  - 3.4. Hipérbola. 237
    - 3.4.1. Definición. 237
    - 3.4.2. Estructura de la hipérbola. 237
    - 3.4.3. Ficha de elementos de la hipérbola. 238
    - 3.4.4. Ecuación de la hipérbola. 239
    - 3.4.5. Asíntotas de la hipérbola. 243
    - 3.4.6. Ecuación general de la hipérbola. 246
    - 3.4.7. Recta tangente a una hipérbola. 247
  
  - 3.5. Excentricidad de las secciones cónicas. 248
    - 3.5.1. Introducción. 248
    - 3.5.2. Definición. 248
    - 3.5.3. Tipo de sección cónica. 248
- EJERCICIOS SÓLO PARA TRIUNFADORES** 249
- APLICACIONES EN EL DÍA A DÍA** 291

# CAPÍTULO 4

## Geometría del espacio y vectores

- PRESENTACIÓN** 303
- Presentación del capítulo** 304
- 4.1. Introducción. 304
- 4.2. Sistemas de coordenadas tridimensionales. 304
- 4.3. Distancia entre dos puntos en el espacio. 311
  - 4.3.1. Punto medio en el espacio tridimensional. 312
  - 4.3.2. Ecuación de una esfera. 313
- 4.4. Vectores en el plano. 315
  - 4.4.1. Introducción. 315
  - 4.4.2. Elementos. 315
  - 4.4.3. Posiciones relativas y propiedades de los vectores. 317
  - 4.4.4. Definición de un vector en el plano. 319
    - 4.1. Vector posición. 319
    - 4.2. Aritmética de componentes. 319
    - 4.3. Propiedades de la aritmética de componentes. 320
    - 4.4. Magnitud (norma) y dirección de un vector. 320
    - 4.5. Vector unitario. 321
    - 4.6. Vectores unitarios canónicos o estándar. 322
  - 4.4.5. Operaciones con vectores en forma geométrica. 322
- 4.5. Vectores en el espacio tridimensional. 323
  - 4.5.1. Introducción. 323
  - 4.5.2. Definición de un vector tridimensional. 323
    - 2.1. Vector posición. 323
    - 2.2. Aritmética de componentes. 323
    - 2.3. Propiedades de la aritmética de componentes. 324
    - 2.4. Demostración de las propiedades de los vectores. 324
    - 2.5. Magnitud o norma de un vector. 325
    - 2.6. Vector unitario. 325
    - 2.7. Vectores unitarios canónicos o estándar. 325
    - 2.8. Vectores paralelos. 326
  - 4.5.3. Geometría de las operaciones algebraicas de los vectores. 327
- 4.6. El producto punto. 328
  - 4.6.1. Introducción. 328
  - 4.6.2. Definición. 328
  - 4.6.3. Propiedades del producto escalar. 328
  - 4.6.4. Demostración de las propiedades del producto punto. 329
  - 4.6.5. Ángulo entre dos vectores. 329
  - 4.6.6. Vectores perpendiculares. 330
  - 4.6.7. Ángulos y cosenos directores. 331
  - 4.6.8. Componente del vector  $v$  sobre  $u$ . 333
  - 4.6.9. Proyección del vector  $v$  sobre  $u$ . 334
  - 4.6.10. Proyección del vector  $v$  ortogonal sobre  $u$ . 337

- 4.7. El producto cruz. 338
    - 4.7.1. Introducción. 338
    - 4.7.2. Definición. 338
    - 4.7.3. Definición alterna del producto cruz. 339
    - 4.7.4. Propiedades del producto cruz. 340
    - 4.7.5. Demostración de las propiedades. 341
    - 4.7.6. Teorema de la ortogonalidad. 342
    - 4.7.7. Magnitud del producto cruz. 343
    - 4.7.8. Teorema del paralelismo. 344
    - 4.7.9. El triple producto vectorial. 344
    - 4.7.10. El triple producto escalar. 344
  - 4.8. Rectas en el espacio tridimensional. 347
    - 4.8.1. Introducción. 347
    - 4.8.2. Definición. 347
    - 4.8.3. Ecuación vectorial de una recta. 347
    - 4.8.4. Ecuaciones paramétricas de una recta. 348
    - 4.8.5. Ecuaciones simétricas o cartesianas de una recta. 350
    - 4.8.6. Rectas perpendiculares y paralelas. 351
    - 4.8.7. Distancia de un punto a una recta en el espacio. 352
  - 4.9. Planos en el espacio tridimensional. 353
    - 4.9.1. Introducción. 353
    - 4.9.2. Definición. 353
    - 4.9.3. Ecuación vectorial de un plano. 353
    - 4.9.4. Ecuación escalar (punto-normal) de un plano. 353
    - 4.9.5. Ecuación general de un plano. 354
    - 4.9.6. Ángulo entre dos planos. 355
    - 4.9.7. Distancia de un punto a un plano. 357
    - 4.9.8. Guías para graficar un plano. 360
-

## CAPÍTULO 5

### Funciones vectoriales de variable real

#### **PRESENTACIÓN** 361

#### **Presentación del capítulo** 362

- 5.1. Introducción. 362
- 5.2. Definición. 362
- 5.3. Curvas en el espacio. 364
  - 5.3.1. Curva en el plano. 364
  - 5.3.2. Curvas en el espacio. 364
- 5.4. Graficando con geogebra. 367
- 5.5. Cálculo de funciones vectoriales. 370
  - 5.5.1. Límite de una función vectorial. 370
  - 5.5.2. Continuidad de una función vectorial. 372
  - 5.5.3. Derivada de una función vectorial. 374
  - 5.5.4. Integral de una función vectorial. 378
- 5.6. Curvatura y vectores unitarios de una curva. 381
  - 5.6.1. Introducción. 381
  - 5.6.2. Vector unitario tangente. 381
  - 5.6.3. Vector unitario normal principal. 383
  - 5.6.4. Curvatura. 384
  - 5.6.5. Curvatura en coordenadas rectangulares. 386
  - 5.6.6. Vector unitario binormal. 388
  - 5.6.7. Componentes tangencial y normal de la aceleración. 391

## CAPÍTULO 6

### Funciones reales de variable vectorial

#### **PRESENTACIÓN** 393

#### **Presentación del capítulo** 394

- 6.1. Introducción. 394
- 6.2. Definición. 395
- 6.3. Enfoque del estudio de funciones de varias variables. 395
  - 6.3.1. Regiones acotadas y no acotadas en el plano. 396
  - 6.3.2. Función de dos variables. 396
  - 6.3.3. Gráfica de una función de dos variables por computadora. 400
  - 6.3.4. Gráfica de una función de dos variables a mano. 401
  - 6.3.5. Curvas de nivel. 403

- 6.3.6. Funciones de tres o más variables 406
- 6.3.7. Extensión de las funciones de tres variables. 407
- 6.3.8. Superficies de nivel. 407
- 6.3.9. Regiones acotadas y no acotadas en el espacio. 408
- 6.4. Límites de funciones de dos variables. 409
  - 6.4.1. Introducción. 409
  - 6.4.2. Definición. 409
  - 6.4.3. Propiedades de los límites de dos variables. 413
- 6.5. Continuidad de funciones de dos variables. 414
  - 6.5.1. Introducción. 414
  - 6.5.2. Definición. 414
  - 6.5.3. Continuidad de una función compuesta. 416
  - 6.5.4. Funciones de tres o más variables. 417
- 6.6. Derivadas parciales. 418
  - 6.6.1. Introducción. 418
  - 6.6.2. Derivadas parciales de una función de dos variables. 418
  - 6.6.3. Notación. 418
  - 6.6.4. Cálculo de las derivadas parciales. 419
  - 6.6.5. Evaluación de las derivadas parciales. 419
  - 6.6.6. Interpretación geométrica. 420
  - 6.6.7. Derivadas parciales de una función de tres o más variables. 422
  - 6.6.8. Derivadas parciales de segundo orden. 424
  - 6.6.9. Derivadas parciales mixtas o cruzadas. 424
  - 6.6.10. Derivadas parciales de orden superior. 426
- 6.7. Linealización y diferenciales. 427
  - 6.7.1. Introducción. 427
  - 6.7.2. Plano tangente. 427
  - 6.7.3. Incremento de la variable dependiente. 429
  - 6.7.4. Diferenciabilidad de funciones de dos variables. 430
    - 4.1. Existencia de la diferenciabilidad. 431
    - 4.2. Diferenciabilidad implica continuidad. 431
  - 6.7.5. Linealización. 432
- 6.8. Regla de la cadena para funciones de varias variables. 435
  - 6.8.1. Introducción. 435
  - 6.8.2. Regla de la cadena para una función de dos variables intermedias. 435
    - 2.1. Regla de la cadena con una variable independiente. 435
    - 2.2. Regla de la cadena con dos variables independientes. 437
  - 6.8.3. Regla de la cadena para una función de tres variables intermedias y una variable independiente. 439
  - 6.8.4. Generalización de la regla de la cadena. 441
  - 6.8.5. Derivación ordinaria implícita. 442
  - 6.8.6. Diferenciación parcial implícita. 443

EJERCICIOS SÓLO PARA TRIUNFADORES 445  
 APLICACIONES EN EL DÍA A DÍA 523

- 6.3.6. Funciones de tres o más variables 406
- 6.3.7. Extensión de las funciones de tres variables. 407
- 6.3.8. Superficies de nivel. 407
- 6.3.9. Regiones acotadas y no acotadas en el espacio. 408
- 6.4. Límites de funciones de dos variables. 409
  - 6.4.1. Introducción. 409
  - 6.4.2. Definición. 409
  - 6.4.3. Propiedades de los límites de dos variables. 413
- 6.5. Continuidad de funciones de dos variables. 414
  - 6.5.1. Introducción. 414
  - 6.5.2. Definición. 414
  - 6.5.3. Continuidad de una función compuesta. 416
  - 6.5.4. Funciones de tres o más variables. 417
- 6.6. Derivadas parciales. 418
  - 6.6.1. Introducción. 418
  - 6.6.2. Derivadas parciales de una función de dos variables. 418
  - 6.6.3. Notación. 418
  - 6.6.4. Cálculo de las derivadas parciales. 419
  - 6.6.5. Evaluación de las derivadas parciales. 419
  - 6.6.6. Interpretación geométrica. 420
  - 6.6.7. Derivadas parciales de una función de tres o más variables. 422
  - 6.6.8. Derivadas parciales de segundo orden. 424
  - 6.6.9. Derivadas parciales mixtas o cruzadas. 424
  - 6.6.10. Derivadas parciales de orden superior. 426
- 6.7. Linealización y diferenciales. 427
  - 6.7.1. Introducción. 427
  - 6.7.2. Plano tangente. 427
  - 6.7.3. Incremento de la variable dependiente. 429
  - 6.7.4. Diferenciabilidad de funciones de dos variables. 430
    - 4.1. Existencia de la diferenciabilidad. 431
    - 4.2. Diferenciabilidad implica continuidad. 431
  - 6.7.5. Linealización. 432
- 6.8. Regla de la cadena para funciones de varias variables. 435
  - 6.8.1. Introducción. 435
  - 6.8.2. Regla de la cadena para una función de dos variables intermedias. 435
    - 2.1. Regla de la cadena con una variable independiente. 435
    - 2.2. Regla de la cadena con dos variables independientes. 437
  - 6.8.3. Regla de la cadena para una función de tres variables intermedias y una variable independiente. 439
  - 6.8.4. Generalización de la regla de la cadena. 441
  - 6.8.5. Derivación ordinaria implícita. 442
  - 6.8.6. Diferenciación parcial implícita. 443
- EJERCICIOS SÓLO PARA TRIUNFADORES 445
- APLICACIONES EN EL DÍA A DÍA 523