

# contenido

PREFACIO

xiii

---

---

## parte I

---

---

*ecuaciones diferenciales ordinarias* 1

### CAPITULO UNO

ECUACIONES DIFERENCIALES EN GENERAL 2

- 1. Conceptos de ecuaciones diferenciales 3
- 1.1 Algunas definiciones y observaciones 3
- 1.2 Ejemplos sencillos de problemas de valor inicial y de frontera 7
- 1.3 Soluciones generales y particulares 15
- 1.4 Soluciones singulares 20
- ◆ 2. Observaciones adicionales relacionadas con las soluciones 23
- 2.1 Observaciones sobre existencia y unicidad 23
- 2.2 Campo de direcciones y el método de las isoclinas 28

### CAPITULO DOS

ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN Y ORDINARIAS  
SIMPLES DE ALTO ORDEN 34

- 1. El método de separación de variables 35
- 2. El método de la transformación de variables 38
- 2.1 La ecuación homogénea 38
- 2.2 Otras transformaciones especiales 39
- 3. La idea intuitiva de exactitud 41
- 4. Ecuaciones diferenciales exactas 43
- 5. Ecuaciones hechas exactas por un factor integrante apropiado 48
- 5.1 Ecuaciones hechas exactas por factores integrantes que involucran una variable 49

5.2	La ecuación de primer orden lineal	53
5.3	El método de inspección	56
6.	Ecuaciones de orden superior al primero que se resuelven fácilmente	57
6.1	Ecuaciones inmediatamente integrables	58
6.2	Ecuaciones con una variable ausente	58
◆ 7.	La ecuación de Clairaut	60
8.	Revisión de métodos importantes	64

## *CAPITULO TRES*

### APLICACIONES DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN Y SIMPLES DE ORDEN SUPERIOR

70

1.	Aplicaciones a la mecánica	71
1.1	Introducción	71
1.2	Las leyes del movimiento de Newton	71
2.	Aplicaciones a los circuitos eléctricos	82
2.1	Introducción	82
2.2	Unidades	84
2.3	La ley de Kirchhoff	84
3.	Trayectorias ortogonales y sus aplicaciones	89
4.	Aplicaciones a la química y a las mezclas químicas	95
5.	Aplicaciones a flujo de calor de estado estacionario	101
6.	Aplicaciones a problemas misceláneos de crecimiento y decaimiento	106
7.	El cable colgante	111
8.	Un viaje a la Luna	116
9.	Aplicaciones a cohetes	120
10.	Problemas de física que involucran geometría	123
11.	Problemas misceláneos en geometría	132
12.	La deflexión de vigas	137
13.	Aplicaciones a biología	148
13.1	Crecimiento biológico	148
13.2	Un problema en epidemiología	153
13.3	Absorción de drogas en órganos o células	156
14.	Aplicaciones a la economía	159
14.1	Oferta y demanda	159
14.2	Inventarios	162

## *CAPITULO CUATRO*

### ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

166

1.	La ecuación diferencial lineal general de orden $n$	167
2.	Existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones lineales	171
3.	¿Cómo obtener la solución complementaria?	173
3.1	La ecuación auxiliar	173
3.2	El caso de raíces repetidas	175
3.3	El caso de raíces imaginarias	178
3.4	Independencia lineal y wronskianos	181
4.	¿Cómo obtener una solución particular?	192
4.1	Método de los coeficientes indeterminados	192
4.2	Justificación al método de coeficientes indeterminados. El método Aniquilador	194
4.3	Excepciones en el método de los coeficientes	196
4.4	Casos donde funciones más complicadas aparecen en el lado derecho	199

4.5	El método de variación de parámetros	202
4.6	Métodos abreviados involucrando operadores	207
5.	Observaciones relacionadas con ecuaciones con coeficientes variables las cuales se pueden transformar en ecuaciones lineales con coeficientes constantes: La ecuación de Euler	215
6.	Repaso de métodos importantes	218

## *CAPITULO CINCO*

### APLICACIONES DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES 223

1.	Movimiento vibratorio de sistemas mecánicos	224
1.1	El resorte vibrante. Movimiento armónico simple	224
1.2	El resorte vibrante con amortiguamiento. Movimiento sobre amortiguado y críticamente amortiguado	232
1.3	El resorte con fuerzas externas	240
1.4	El fenómeno de resonancia mecánica	243
2.	Problemas de circuitos eléctricos	246
3.	Problemas misceláneos	250
3.1	El péndulo simple	250
3.2	Oscilaciones verticales de una caja flotando en un líquido	252
3.3	Un problema en cardiografía	253
3.4	Aplicación a la economía	255

## *CAPITULO SEIS*

### SOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES POR TRANSFORMADAS DE LAPLACE 260

1.	Introducción al método de las transformadas de Laplace	261
1.1	Motivación para las transformadas de Laplace	261
1.2	Definición y ejemplos de la transformada de Laplace	262
1.3	Propiedades adicionales de las transformadas de Laplace	265
1.4	La función Gamma	266
1.5	Observaciones concernientes a la existencia de las transformadas de Laplace	267
1.6	La función salto unidad de Heaviside	269
2.	Funciones impulso y la función delta de Dirac	273
3.	Aplicación de las transformadas de Laplace a ecuaciones diferenciales	278
3.1	Solución de ecuaciones diferenciales sencillas. Transformadas inversas de Laplace	278
3.2	Algunos métodos para hallar transformadas inversas de Laplace	279
3.3	Observaciones concernientes a la existencia y unicidad de las transformadas inversas de Laplace	287
4.	Aplicaciones a problemas físicos y biológicos	290
4.1	Aplicaciones a circuitos eléctricos	290
4.2	Una aplicación a la biología	293
4.3	El problema tautócrono—Aplicación de una ecuación integral en mecánica	294
4.4	Aplicaciones involucrando la función delta	298
4.5	Una aplicación a la teoría de control automático y servomecanismos	299

## *CAPITULO SIETE*

### SOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES USANDO SERIES 304

1.	Introducción al uso de series	305
1.1	Motivación para soluciones con series	305

1.2	Uso de la notación sumatoria	307
1.3	Algunas preguntas de rigor	311
1.4	El método de la serie de Taylor	317
1.5	Método de iteración de Picard	319
2.	El método de Frobenius	322
2.1	Motivación para el método de Frobenius	322
2.2	Ejemplos usando el método de Frobenius	326
3.	Soluciones con series de algunas ecuaciones diferenciales importantes	338
3.1	La ecuación diferencial de Bessel	338
3.2	Ecuación diferencial de Legendre	348
3.3	Otras funciones especiales	350

## *CAPITULO OCHO*

### ◆ FUNCIONES ORTOGONALES Y PROBLEMAS DE STURM-LIOUVILLE 353

1.	Funciones ortogonales	354
1.1	Funciones como vectores	354
1.2	Ortogonalidad	356
1.3	Longitud o norma de un vector. Ortonormalidad	357
2.	Problemas de Sturm-Liouville	361
2.1	Motivación para los problemas de Sturm-Liouville. Eigenvalores y Eigenfunciones	361
2.2	Una aplicación al pandeo de vigas	368
3.	Ortogonalidad de las funciones de Bessel y Legendre	371
3.1	Ortogonalidad de las funciones de Bessel	371
3.2	Ortogonalidad de las funciones de Legendre	376
3.3	Funciones ortogonales misceláneas	378
4.	Series ortogonales	380
4.1	Introducción	380
4.2	Series de Fourier	385
4.3	Series de Bessel	403
4.4	Series de Legendre	408
4.5	Series ortogonales misceláneas	411
5.	Algunos tópicos especiales	414
5.1	Ecuaciones diferenciales así mismo adjuntas	414
5.2	El método de ortonormalización de Gram-Schmidt	417

## *CAPITULO NUEVE*

### LA SOLUCIÓN NUMERICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES 420

1.	Solución numérica de $y' = f(x, y)$	421
1.1	El método de pendiente constante o método de Euler	422
1.2	El método de pendiente promedio o método modificado de Euler	425
1.3	Diagramas de computador	427
1.4	Análisis de errores	428
1.5	Algunas guías prácticas para la solución numérica	431
2.	El método de Runge-Kutta	433

*sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias*

**CAPITULO DIEZ**

**SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES Y SUS APLICACIONES 438**

1.	Sistemas de ecuaciones diferenciales	439
1.1	Motivación para los sistemas de ecuaciones diferenciales	439
1.2	Método de eliminación para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales	441
1.3	El uso de operadores en la eliminación de incógnitas	443
1.4	Métodos abreviados de operador	446
2.	Soluciones de sistemas no lineales de ecuaciones diferenciales ordinarias	448
3.	Ecuaciones diferenciales expresadas como sistema de primer orden	449
4.	Aplicaciones a la mecánica	452
4.1	El vuelo de un proyectil	452
4.2	Una aplicación a astronomía	457
4.3	El movimiento de satélites y misiles	465
4.4	El problema de las masas vibrantes	470
5.	Aplicaciones a las redes eléctricas	476
6.	Aplicaciones a la biología	481
6.1	Concentración de una droga en un sistema de dos compartimientos	481
6.2	El problema de epidemia con cuarentena	484
7.	El problema depredador-presa: Un problema en ecología	488
7.1	Formulación matemática	489
7.2	Investigación de una solución	490
7.3	Algunas aplicaciones adicionales	497
8.	Solución de sistemas lineales por transformadas de Laplace	498
9.	Método de las soluciones complementaria y particular	500
9.1	¿Cómo encontramos la solución complementaria?	502
9.2	¿Cómo encontramos una solución particular?	506
9.3	Resumen del procedimiento	507

**CAPITULO ONCE**

**METODOS DE EIGENVALORES DE MATRICES PARA SISTEMAS  
DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES**

510

1.	El concepto de una matriz	511
1.1	Introducción	511
1.2	Algunas ideas simples	511
1.3	Vectores fila y columna	512
1.4	Operaciones con matrices	514
2.	Ecuaciones diferenciales matriciales	521
3.	La solución complementaria	522
3.1	Eigenvalores y eigenvectores	523
3.2	El caso de eigenvalores reales distintos	524
3.3	El caso de eigenvalores repetidos	526
3.4	El caso de eigenvalores imaginarios	527
3.5	Un problema algo más complicado	529

3.6	Independencia lineal y wronskianos	532
4.	La solución particular	533
5.	Resumen del procedimiento	534
6.	Aplicaciones usando matrices	535
7.	Algunos tópicos especiales	539
7.1	Ortogonalidad	539
7.2	Longitud de un vector	541
7.3	Eigenvalores y eigenvectores de matrices reales simétricas	542

---



---

## *parte III*

---



---

### *ecuaciones diferenciales parciales*

#### *CAPITULO DOCE*

ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES EN GENERAL		550
1.	El concepto de una ecuación diferencial parcial	551
1.1	Introducción	551
1.2	Soluciones de algunas ecuaciones diferenciales parciales sencillas	551
1.3	Significado geométrico de las soluciones general y particular	554
1.4	Ecuaciones diferenciales parciales que surgen de la eliminación de funciones arbitrarias	555
2.	El método de separación de variables	560
3.	Algunas ecuaciones diferenciales parciales importantes que surgen de problemas físicos	569
3.1	Problemas que involucran vibraciones u oscilaciones. La cuerda vibrante	569
3.2	Problemas que involucran conducción o difusión de calor.	573
3.3	Problemas que involucran potencial eléctrico o gravitacional	577
3.4	Observaciones sobre la deducción de ecuaciones diferenciales parciales	578

#### *CAPITULO TRECE*

SOLUCIONES DE PROBLEMAS DE VALOR DE FRONTERA USANDO SERIES DE FOURIER		581
1.	Problemas de valor de frontera que involucran conducción de calor	582
1.1	El problema de Fourier	582
1.2	Problemas que involucran fronteras aisladas	588
1.3	Temperatura de estado estacionario en una placa semi-infinita	590
1.4	Interpretación de difusión de la conducción de calor	593
2.	Problemas de valor de frontera que involucran movimiento vibratorio	597
2.1	El problema de la cuerda vibrante	597
2.2	La cuerda vibrante con amortiguamiento	601
2.3	Vibraciones de una viga	603
3.	Problemas de valor de frontera que involucran la ecuación de Laplace	607
4.	Problemas misceláneos	615
4.1	La cuerda vibrante bajo la gravedad	615
4.2	Conducción de calor en una barra con condiciones no cero en los extremos	617

4.3	La cuerda vibrante con velocidad inicial no cero	619
4.4	Vibraciones de una piel de tambor cuadrada: Un problema que involucra series dobles de Fourier	620
4.5	Conducción de calor con radiación	625

## *CAPITULO CATORCE*

### ◆ SOLUCIONES DE PROBLEMAS DE VALOR DE FRONTERA USANDO FUNCIONES DE BESSEL Y DE LEGENDRE 632

1.	Introducción	633
2.	Problemas de valor de frontera que conducen a funciones de Bessel	633
2.1	El Laplaciano en coordenadas cilíndricas	633
2.2	Conducción de calor en un cilindro circular	634
2.3	Conducción de calor en un cilindro radiante	637
2.4	Vibraciones de una piel de tambor circular	638
3.	Problemas de valor de frontera que conducen a funciones de Legendre	646
3.1	El Laplaciano en coordenadas esféricas	646
3.2	Conducción de calor en una esfera	648
3.3	Potencial eléctrico o gravitacional debido a una esfera	651
4.	Problemas misceláneos	655
4.1	El problema de la cadena vibrante	655
4.2	Potencial eléctrico debido a un alambre circular uniformemente cargado	659
4.3	El problema de la bomba atómica	662

## *APENDICE*

DETERMINANTES	A-1
RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS	A-7
TABLAS: DE TRASFORMADAS...; DE INTEGRALES...	T-1
BIBLIOGRAFIA	B-1
MATEMATICOS QUE HICIERON APORTES...	M-1
INDICE	I-1