

INDICE GENERAL

1. Curvas en el Plano	23
1.1 Espacios euclídeos	24
1.2 Curvas en \mathbb{R}^n	26
1.3 Longitud de una curva	29
1.4 Campos de vectores a lo largo de curvas.....	32
1.5 Curvatura de una curva plana	34
1.6 El ángulo de giro	37
1.7 La parábola semicúbica	38
1.8 Ejercicios	39
2. Estudio de Curvas en el Plano con Mathematica	41
2.1 Cálculo de la curvatura de una curva en el plano	44
2.2 Cálculo de longitudes de curvas	48
2.3 Relleno de curvas	50
2.4 Ejemplos de curvas en \mathbb{R}^2	51
2.5 Trazado de curvas definidas a trozos	56
2.6 Ejercicios	59

3. Curvas Planas Famosas	63
3.1 Cicloides	63
3.2 Lemniscatas de Bernoulli	65
3.3 Cardioides	67
3.4 La cisoide de Diocles	69
3.5 La tractriz	73
3.6 Clotoides	77
3.7 Ejercicios	79
4. Métodos Alternativos para el Trazado de Curvas Planas	83
4.1 Curvas en \mathbb{R}^2 definidas implícitamente	84
4.2 Ovalos de Cassini	89
4.3 Curvas planas en coordenadas polares	93
4.4 Ejercicios	98
5. Curvas Definidas a Partir de Otras	101
5.1 Evolutas	102
5.2 Evolutas iteradas	105
5.3 La evoluta de una tractriz es una catenaria	106
5.4 Evolventes	107
5.5 Rectas tangentes y rectas normales a curvas planas	112
5.6 Circunferencias osculatrices de curvas planas	116
5.7 Curvas paralelas	121
5.8 Curvas podarias	123
5.9 Ejercicios	126

6. Determinación de una Curva Plana por su Curvatura ..	131
6.1 Movimientos euclídeos.....	132
6.2 Curvas y movimientos euclídeos	136
6.3 Ecuación intrínseca de una curva plana	137
6.4 Representación gráfica de curvas con curvatura prefijada	142
6.5 Ejercicios	148
7. Curvas en el Espacio	151
7.1 Preliminares.....	152
7.2 Curvatura y torsión de curvas en \mathbb{R}^3 con velocidad unitaria.....	153
7.3 Curvatura y torsión de curvas en \mathbb{R}^3 con velocidad arbitraria	157
7.4 Cálculo de la curvatura y la torsión con Mathematica.....	162
7.5 La hélice circular y sus generalizaciones	166
7.6 La curva de Viviani	169
7.7 El teorema fundamental de curvas en el espacio	171
7.8 Representación gráfica de curvas en el espacio con curvatura y torsión prefijadas	174
7.9 Ejercicios	177
8. Tubos y Nudos	181
8.1 Tubos alrededor de curvas	181
8.2 Nudos toroidales.....	183
8.3 Ejercicios.....	189
9. Cálculo en Espacios Euclídeos.....	191
9.1 Vectores tangentes a \mathbb{R}^n	192
9.2 Vectores tangentes como derivadas direccionales.....	194

9.3	<i>Aplicaciones tangentes</i>	196
9.4	<i>Campos de vectores sobre \mathbb{R}^n</i>	200
9.5	<i>Derivadas de campos de vectores sobre \mathbb{R}^n</i>	204
9.6	<i>Revisión de curvas</i>	210
9.7	<i>Ejercicios</i>	211
10.	<i>Superficies en el Espacio Euclídeo</i>	213
10.1	<i>Superficies parametrizadas en \mathbb{R}^n</i>	213
10.2	<i>Superficies parametrizadas en \mathbb{R}^3</i>	222
10.3	<i>La aplicación local de Gauss</i>	224
10.4	<i>Definición de superficie regular en \mathbb{R}^n</i>	225
10.5	<i>Vectores tangentes a superficies regulares en \mathbb{R}^n</i>	232
10.6	<i>Aplicaciones entre superficies</i>	234
10.7	<i>Superficies de nivel en \mathbb{R}^3</i>	236
10.8	<i>Ejercicios</i>	239
11.	<i>Ejemplos de Superficies</i>	241
11.1	<i>El grafo de una función de dos variables</i>	243
11.2	<i>El elipsoide</i>	247
11.3	<i>El elipsoide estereográfico</i>	248
11.4	<i>Toros</i>	250
11.5	<i>El paraboloides</i>	253
11.6	<i>Caracolas marinas</i>	255
11.7	<i>Superficies parametrizadas con singularidades</i>	256
11.8	<i>Representación gráfica de superficies en forma implícita</i>	257
11.9	<i>Ejercicios</i>	258

12. Superficies No Orientables	261
12.1 Orientabilidad de superficies	261
12.2 Superficies no orientables descritas por identificaciones	267
12.3 La banda de Möbius	269
12.4 La botella de Klein	271
12.5 Realizaciones del plano proyectivo real	273
12.6 Coloreado de superficies con Mathematica	277
12.7 Ejercicios	279
13. Métricas sobre Superficies	283
13.1 La idea intuitiva de distancia sobre una superficie	283
13.2 Isometrías entre superficies	287
13.3 La idea intuitiva de área de una superficie	291
13.4 Un miniprograma para el cálculo de métricas y áreas sobre una superficie	293
13.5 Ejemplos de métricas	294
13.6 Ejercicios	296
14. Superficies en el Espacio de Dimensión 3	299
14.1 El operador forma	300
14.2 Curvatura normal	303
14.3 Cálculo del operador forma	307
14.4 Los autovalores del operador forma	311
14.5 Curvatura de Gauss y curvatura media	313
14.6 Las tres formas fundamentales	320
14.7 Ejemplos de cálculo manual de curvaturas	322
14.8 Curvatura de superficies definidas implícitamente	326

14.9	<i>Ejercicios</i>	333
15.	<i>Superficies en el Espacio de Dimensión 3 vía Mathematica</i>	335
15.1	<i>Miniprogramas para el cálculo del operador forma y de las curvaturas</i>	336
15.2	<i>Ejemplos del cálculo de las curvaturas con Mathematica</i>	339
15.3	<i>Las curvaturas principales vía Mathematica</i>	346
15.4	<i>La aplicación de Gauss vía Mathematica</i>	347
15.5	<i>Ejercicios</i>	354
16.	<i>Curvas Asintóticas sobre Superficies</i>	355
16.1	<i>Curvas asintóticas</i>	356
16.2	<i>Ejemplos de curvas asintóticas</i>	360
16.3	<i>Uso de Mathematica en la determinación de curvas asintóticas</i>	364
16.4	<i>Ejercicios</i>	368
17.	<i>Superficies Regladas</i>	371
17.1	<i>Ejemplos de superficies regladas</i>	372
17.2	<i>Superficies regladas llanas</i>	379
17.3	<i>Superficies regladas no cilíndricas</i>	383
17.4	<i>Ejemplos de líneas de estricción de superficies regladas no cilíndricas</i>	387
17.5	<i>Un miniprograma para superficies regladas</i>	388
17.6	<i>Otros ejemplos de superficies regladas</i>	391
17.7	<i>Ejercicios</i>	393

18. Superficies de Revolución	395
18.1 Líneas de curvatura	397
18.2 Curvaturas de una superficie de revolución	399
18.3 Determinación de una superficie con Mathematica	403
18.4 El catenoide	405
18.5 El hiperboloide de revolución	408
18.6 Superficies de revolución de curvas con curvatura prefijada	409
18.7 Superficies de revolución generadas a partir de puntos	411
18.8 Ejercicios	414
19. Superficies con Curvatura de Gauss Constante	417
19.1 La integral elíptica de segunda especie	418
19.2 Superficies de revolución con curvatura constante positiva	418
19.3 Superficies de revolución con curvatura constante negativa	422
19.4 La superficie de Kuen	426
19.5 Ejercicios	428
20. Geometría Intrínseca de Superficies	431
20.1 Fórmulas intrínsecas para la curvatura de Gauss	432
20.2 Teorema egregium de Gauss	437
20.3 Símbolos de Christoffel	439
20.4 Ecuaciones de Mainardi-Codazzi	443
20.5 Curvatura geodésica	445
20.6 Ejercicios	450

21. Líneas de Curvatura y Puntos Umbílicos	453
21.1 Ecuación diferencial de las líneas de curvatura	454
21.2 Puntos umbílicos.....	457
21.3 Sistemas triples ortogonales de superficies	461
21.4 Coordenadas elípticas	468
21.5 Coordenadas parabólicas	476
21.6 Ejercicios	479
22. Superficies Minimales I	481
22.1 Variación normal	481
22.2 Ejemplos de superficies minimales	485
22.3 La aplicación de Gauss de una superficie minimal	495
22.4 Ejercicios	497
23. Superficies Minimales II.....	501
23.1 Coordenadas isotermas	502
23.2 Elementos de álgebra y análisis complejos	503
23.3 Derivadas complejas y curvas minimales	508
23.4 Determinación de superficies minimales conjugadas	516
23.5 Superficie de Enneper de grado n	523
23.6 Ejercicios	528
24. Superficies Minimales III.....	531
24.1 La representación de Weierstrass	531
24.2 Parametrizaciones locales de Weierstrass vía Mathematica	535
24.3 Ejemplos de parametrizaciones locales de Weierstrass	536

24.4	<i>Superficies minimales con un final plano</i>	539
24.5	<i>Ejercicios</i>	542
25.	<i>Construcción de Superficies</i>	545
25.1	<i>Superficies paralelas</i>	545
25.2	<i>El operador forma de una superficie paralela</i>	549
25.3	<i>Superficies podarias</i>	552
25.4	<i>Helicoides generalizados</i>	554
25.5	<i>Superficies por torsión</i>	561
25.6	<i>Ejercicios</i>	564
26.	<i>Variedades Diferenciables</i>	565
26.1	<i>Definición de variedad diferenciable</i>	566
26.2	<i>Funciones diferenciables sobre variedades diferenciables</i>	571
26.3	<i>Vectores tangentes a variedades diferenciables</i>	577
26.4	<i>Aplicaciones inducidas</i>	586
26.5	<i>Campos de vectores sobre variedades diferenciables</i>	592
26.6	<i>Campos de tensores sobre variedades diferenciables</i>	597
26.7	<i>Ejercicios</i>	600
27.	<i>Variedades de Riemann</i>	603
27.1	<i>Derivadas covariantes</i>	604
27.2	<i>Métricas de Riemann indefinidas</i>	610
27.3	<i>Tratamiento clásico de las métricas</i>	614

28. Superficies Abstractas	619
28.1 Métricas sobre superficies abstractas	620
28.2 Ejemplos de superficies abstractas	623
28.3 Cálculo de la curvatura de métricas sobre superficies abstractas	625
28.4 Orientabilidad de una superficie abstracta	628
28.5 Curvatura geodésica en las superficies abstractas	629
28.6 Ejercicios	630
29. Geodésicas en Superficies	633
29.1 Las ecuaciones geodésicas	633
29.2 Parametrizaciones de Clairaut	636
29.3 Ejemplos de parametrizaciones de Clairaut	640
29.4 Determinación numérica de las geodésicas con Mathematica ..	642
29.5 Ejercicios	646
30. Superficies Minimales IV	647
30.1 Fórmula de Björling	647
30.2 Determinación de superficies minimales a partir de curvas planas	650
30.3 Ejemplos de superficies minimales construidas a partir de curvas planas	652
30.4 Ejercicios	658
Apéndices	
A Programas generales	659
B Curvas planas	707

<i>C</i>	<i>Curvas planas definidas implícitamente</i>	721
<i>D</i>	<i>Curvas planas en coordenadas polares</i>	727
<i>E</i>	<i>Curvas en el espacio</i>	731
<i>F</i>	<i>Superficies</i>	735
<i>G</i>	<i>Superficies definidas en forma implícita</i>	759
<i>H</i>	<i>Representación gráfica de membranas</i>	763
<i>I</i>	<i>Curvas minimales</i>	765
<i>J</i>	<i>Métricas</i>	773
<i>K</i>	<i>Programas para la realización de representaciones gráficas</i>	777
<i>L</i>	<i>Mathematica y Acrospin</i>	783
	<i>Bibliografía</i>	789
	<i>Indice Terminológico</i>	805